数理解析研究所講究録
118巻 1971年 13-39

場の量子論における
自己共役演算子

明星大 理工　関 根 克 彦

§1. Nelson の定理とその応用. とくに Fock space における自己共役演算子について.

<u>定義</u>. X をバナッハ空間 $\mathfrak{X}$ における演算子とするとき, $x \in \mathfrak{X}$ が X にかんして analytic vector であるとは, 巾級数

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|X^p x\|}{p!} s^p, \qquad s \in \mathbb{C},$$

が 0 でない収束半径をもつことである。とくにこの収束半径が ∞ であるとき x を entire vector という.

<u>Nelson の定理.</u>[1)] $\mathfrak{H}$ をヒルベルト空間とする. $\mathfrak{H}$ における閉対称演算子 X が自己共役であるためには, X の定義域 $D(X)$ が X にかんする analytic vector の dense set K を含むことが必要十分である.

系。$\mathfrak{H}$における対称演算子Xの定義域$D(X)$がXにかんするanalytic vectorのdense set Kを含むなら，Xは本質的自己共役（すなわち$\bar{X}$が自己共役）である。（証明）Xは対称演算子だからclosable，従って$\bar{X}$が存在する．この$\bar{X}$にたいして上の定理を適用すればよい．

なお，この場合$X|K=X_1$とおいて系を用いることが出来るから，このX_1が本質的自己共役であると云ってよい．

注意．$\mathfrak{H}$における演算子Xが対称であるとは，(i) $D(X)$が$\mathfrak{H}$においてdense，(ii) $\forall x, y \in D(X)$にたいし$(Xx, y) = (x, Xy)$が成り立つ（この二番目の条件を以下「エルミート条件」とよぶ），の二条件をみたすことであるが，上述の系を適用するにあたってまず，analytic vectorのset $K \subset D(X)$が$\mathfrak{H}$でdenseであることが確かめられたら，これによって(i)は自動的にみたされるから，Xの対称性にかんしては(ii)のエルミート条件だけをチェックすればよい．

応用例1．

$\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty)$，$X$として$f(x) \longmapsto xf(x)$をとる．ここで，$D(X) = \{f \;;\; f \in L_2,\; xf \in L_2\}$．

$K_N = \{f \;;\; f \in L_2,\; \mathrm{supp}\, f \subset (-N, N)\}$とし，

$K = \bigcup_{N>0} K_N$ をつくると，$K \subset D(X)$ で，K は $\mathfrak{H}$ において dense である．

K の任意の元 g が X にかんする analytic vector であることは，次のようにして証明できる．$g \in K$ なら，$\exists N, g \in K_N$．このとき

$$\| Xg \|^2 = \int_{-N}^{N} |xg(x)|^2 dx \leqq N^2 \int_{-N}^{N} |g(x)|^2 dx$$
$$\leqq N^2 \| g \|^2.$$

すなわち

$$\| Xg \| \leqq N \| g \| . \qquad (1)$$

しかも，$g \in K_N$ なら $Xg \in K_N$ が云えるから，(1)を反復使用することが出来て $\| X^p g \| \leqq N^p \| g \|$，従って

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\| X^p g \|}{p!} s^p \right| \leqq \| g \| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(N|s|)^p}{p!} < \infty .$$

収束半径は ∞ だから g は entire vector である．

一方，X がエルミート條件をみたしていることは，x が実数であることから明らか．

従って，Nelson の定理の系により $X|K = X_1$ は本質的自己共役である．

故に $\overline{X_1}$ は自己共役で，$\overline{X_1} = (\overline{X_1})^* = X_1^*$ であるが，いまの場合，X_1^* は容易に求められ，その定義域は $f \in L_2$ でかつ $xf \in L_2$ であるような f の全体である．結局，$\overline{X_1}$

は最初に与えたXに等しいことが分る．

応用例２．

$\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty)$におけるベクトルの完全規格直交系

$$u_n = N_n H_n(x) e^{-x^2/2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

をとる．ここにH_nはn次のエルミート多項式，N_nは規格化のための定数である．Xとして，$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \longmapsto X\psi = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n u_n$ を考える．ここに，$D(X)$は $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$ であるような $\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ の全体である．

ここで，$\phi = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n$ の形のベクトルの集まりをK_Nとし，$K = \bigcup_{N=0}^{\infty} K_N$をつくる．$K \subset D(X)$で，$K$は$\mathfrak{H}$において dense である．

Kの任意のベクトルϕが analytic vector であることの証明： $\exists N$, $\phi \in K_N$ から

$$\| X\phi \|^2 = \| \sum_{n=0}^{N} n c_n u_n \|^2 = \sum_{n=0}^{N} n^2 |c_n|^2 \leqq N^2 \|\phi\|^2 .$$

故に $\|X\phi\| \leqq N \|\phi\|$ ．しかも，$\phi \in K_N$ ならば $X\phi \in K_N$ であるから，ここに得られた関係を反復使用できて $\|X^p \phi\| \leqq N^p \|\phi\|$．従って，応用例１と同様，$\phi$が entire vector であることが証明できる．

他方において，Xがエルミート条件をみたすことは明らか．よって，$X|K = X_1$ は本質的自己共役である．

この場合も，自己共役な$\overline{X_1}$は最初に与えたXに等しいことが，応用例1と同様にして示せる．

応用例2に出て来た完全規格直交系$\{u_n\}$の各ベクトルは，調和振動子の固有関数である．上に考えた演算子Xは「個数の演算子」と呼ばれ，通常Nであらわす．なお，調和振動子のハミルトニアンは，$H_0 = \hbar\omega N$の形で，このH_0が自己共役であることも上と同様にして証明できる．

さてベクトル u_n のはる一次元の部分空間を$\mathfrak{H}_n$と書くと，全空間$\mathfrak{H}$は，$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ のように直和の形に書ける．しかも，応用例2のXは各$\mathfrak{H}_n$をそれ自身にうつす．Xによって部分空間$\mathfrak{H}_n$に誘導された変換の演算子をX_nと書くと，X_n は$\mathfrak{H}_n$全体で定義された対称演算子であるから自己共役である．この時，$\mathfrak{H}$における $X = \bigoplus_{n=0}^{\infty} X_n$ もまた自己共役であることを云うのに Nelson の定理を用いた．こう見て来ると，上の応用例2は直ちに次のように一般化できる．

<u>応用例3</u>．

直和の形にあらわされたヒルベルト空間 $\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$

において，各 $\mathfrak{H}_n$ をそれ自身にうつす演算子 X_n が自己共役であるとする．この時，$\mathfrak{H}$ における演算子 $X = \bigoplus_{n=0}^{\infty} X_n$ は自己共役である．

（証明）$\mathfrak{H}_n$ における X_n が仮定によって自己共役であるから，Nelson の定理の前半（必要条件）によって analytic vector の dense set $D_n \subset D(X_n)$ がある．D_n は $\mathfrak{H}_n$ において dense である．

ここで K_N として，$\{\phi_0, \phi_1, \cdots \phi_N, 0, 0, \cdots\}$ の形のベクトルで，しかも $\phi_n \in D_n$ $(n = 0, 1, \cdots, N)$ であるようなものの全体をとり，$K = \bigcup_{N=0}^{\infty} K_N$ をつくる．$K \subset D(X)$ で，K は $\mathfrak{H}$ において dense である．

K の任意のベクトル ϕ が X にかんする analytic vector であることは，次のようにして証明できる．$\exists N$, $\phi \in K_N$ より

$$\| X^p \phi \|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_{n=0}^{N} \| X_n^p \phi_n \|_{\mathfrak{H}_n}^2 \leqq \left(\sum_{n=0}^{N} \| X_n^p \phi_n \|_{\mathfrak{H}_n} \right)^2$$

故に

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\| X^p \phi \|_{\mathfrak{H}}}{p!} s^p \right| \leqq \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\| X_n^p \phi_n \|_{\mathfrak{H}_n}}{p!} |s|^p$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\| X_n^p \phi_n \|_{\mathfrak{H}_n}}{p!} |s|^p \right)$$

$\phi_n \in D_n$ は X_n にかんする analytic vector であったから，上の括弧の中の巾級数は 0 でない収束半径をもつ．従って，左辺の巾級数も 0 でない収束半径をもち，$\phi \in K$ は X にかんする analytic vector である．

X_n は $\mathfrak{H}_n$ における自己共役演算子であるから，エルミート条件をみたし，かつ閉演算子である．X_n がエルミート条件をみたすことから，X もエルミート条件をみたすことは明らか．また，X_n が閉演算子であることから X が閉であることが云える．

従って，Nelson の定理の後半（十分條件）を用いることによって，X が $\mathfrak{H}$ における自己共役演算子であることが云える．

なお，X の定義域 $D(X)$ は，$\{\phi_0, \phi_1, \cdots \}$ で $\phi_n \in D(X_n)$，かつ $\sum_{n=0}^{\infty} \| X_n \phi_n \|^2_{\mathfrak{H}_n} < \infty$ であるようなその全体である．

注意．上の例において，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_n$ は何であってもよい．$\mathfrak{H}_n = \mathbb{C}$ で，従って $\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n \sim \ell^2$ の場合が応用例えであるが，このほかに，場の量子論に出て来る Fock space が同様の構造をもっている．

Fock space の例.

簡単のため一種類のボーズ粒子だけからなる物理系を考えると，これを記述するためのヒルベルト空間$\mathfrak{H}$は，$\mathfrak{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$，ただし$\mathfrak{H}_0 = \mathbb{C}$，$\mathfrak{H}_1 = L_2(\mathbb{R}^3)$で，$\mathfrak{H}_n$（$n = 2, 3, \cdots$）は$L_2(\mathbb{R}^{3n})$の部分空間で対称な関数だけを含む．

「個数の演算子」Nは，$N = \oplus_{n=0}^{\infty} N_n$，ここに$N_n$は$\mathfrak{H}_n$全体で定義された自己共役演算子で，$\phi_n \in \mathfrak{H}_n$を$n\phi_n$へ移す．また自由場のハミルトニアン$H_0$も，$H_0 = \oplus_{n=0}^{\infty} H_{0n}$の形で，$H_{0n}$は$\phi_n \longmapsto [\sum_{i=1}^{n} \omega(k_i)]\phi_n$で与えられる$\mathfrak{H}_n \to \mathfrak{H}_n$の自己共役演算子．ここに，$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$で，$m > 0$は粒子の質量をあらわす．

応用例3によって，NもH_0も$\mathfrak{H}$における自己共役演算子である．

応用例4.

ヒルベルト空間$\mathfrak{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$においてXが各$\mathfrak{H}_n$を不変にしない演算子であっても，Nelson の定理が使えてその自己共役性が云える場合がある．そのような例として，再び量子力学の調和振動子の問題を考える．すなわち，$\mathfrak{H} = L_2(-\infty, \infty) \sim l^2$で，これは$\mathfrak{H}_n = \mathbb{C}$として$\mathfrak{H} = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$の形に書ける．Xとして掛算の演算子$f(x) \longmapsto xf(x)$を

とる．

この演算子の自己共役性はすでに応用例1で云えているが，ここではFock spaceの場合への一般化を期待して別の方法をこころみる．すなわち，analytic vectorのdense set Kとして前とは別のものをとる．

$\mathfrak{H}$のベクトル $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ （u_nは応用例2の完全規格直交系の関数）は，その係数の組 $\{c_0, c_1, \cdots\} \in \ell^2$ であらわされるが，ここで $\{c_0, c_1, \cdots c_N, 0, 0, \cdots\}$ のようなベクトルの全体をK_Nとし（$K_N = \bigoplus_{n=0}^{N} \mathfrak{H}_n$），$K = \bigcup_{N=0}^{\infty} K_N$ をつくる．$K \subset D(X)$で，Kは$\mathfrak{H}$において dense である．$X|K = X_1$ が本質的自己共役であることをこれから示す．

Kの任意の元ϕを

$$\phi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip)\phi, \qquad p = -i\frac{d}{dx},$$

にうつす（Kの上で定義された）演算子をa，同様に

$$\phi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip)\phi$$

をa^*とする．明らかに，$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^*)$．

とくに

$$a u_0 = 0, \quad a u_n = \sqrt{n}\, u_{n-1},$$

$$a^* u_{n-1} = \sqrt{n}\, u_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

従って，aは$\mathfrak{H}_n \to \mathfrak{H}_{n-1}$，$a^*$は$\mathfrak{H}_{n-1} \to \mathfrak{H}_n$の演算子で

あることが分る．（a を $\mathfrak{H}_n \to \mathfrak{H}_{n-1}$ の演算子とし a^* を $\mathfrak{H}_{n-1}^* \to \mathfrak{H}_n^*$ の演算子とみるとき，a^* が a の正しい意味での共役演算子になっていることが示せる．ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}_n$ については $\mathfrak{H}_n^*$ を $\mathfrak{H}_n$ と同一視できるから，この a^* は上に与えた a^* と同じものだと考えてよい．）

結局，X_1 は $\mathfrak{H}_n \longrightarrow \mathfrak{H}_{n-1} \oplus \mathfrak{H}_{n+1}$ の演算子で（ただし $\mathfrak{H}_{-1} = \{0\}$ とする）

$$\sqrt{2}\, X_1 u_n = \sqrt{n}\, u_{n-1} + \sqrt{n+1}\, u_{n+1}$$

である．この式から，（Kで定義された演算子としての）X_1 がエルミート条件をみたしていることが分る．しかも，$K = D(X_1)$ が $\mathfrak{H}$ で dense だから，X_1 は $\mathfrak{H}$ における対称演算子である．さらにこの X_1 が本質的自己共役であることを Nelson の定理を使って云うには，Kの任意の元 ϕ が X_1 にかんする analytic vector であることを示せばよい．

$\phi \in K$ にたいしてまず

$$\| X_1 \phi \| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} (\| a\phi \| + \| a^* \phi \|).$$

ここで $\phi \in K$ だから，$\exists N$，$\phi \in K_N$，従って

$$\phi = \sum_{n=0}^{N} c_n u_n ,$$

$$a\phi = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n}\, c_n u_{n-1} .$$

故に

$$\| a\phi \| \leqq \sqrt{N}\, \| \phi \| .$$

同様に

$$\| a^* \phi \| \leqq \sqrt{N+1} \, \| \phi \|.$$

従って

$$\| X_1 \phi \| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{N} + \sqrt{N+1}) \| \phi \|$$
$$\leqq \sqrt{2} \sqrt{N+1} \, \| \phi \|.$$

ただし，ここで $\phi \in K_N$．この時，$X_1 \phi \in K_{N+1}$ であることに注意すると，次の評価が得られる．

$$\| X_1^p \phi \| \leqq (\sqrt{2})^p \sqrt{N+1} \sqrt{N+2} \cdots \sqrt{N+p} \, \| \phi \|.$$

ここで次の巾級数の収束半径を調べよう．

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\| X_1^p \phi \|}{p!} s^p \right| \leqq \| \phi \| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}|s|)^p}{p!} \sqrt{N+1} \cdots \sqrt{N+p}.$$

右辺の級数の一般項を a_p とおくと，

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \sqrt{2} |s| \frac{\sqrt{N+p+1}}{p+1} \rightarrow 0 \qquad (p \rightarrow \infty).$$

故に右辺の級数は任意の s にたいして収束する．従って左辺の巾級数の収束半径は ∞ で，ϕ は X_1 にかんする entire vector である．

以上で，Nelson の定理の系のすべての條件がみたされた．故に，$X_1 = X | K$ は本質的自己共役である．

この時，自己共役な $\overline{X_1}$ が X に一致することは，応用例 1，2 の場合と同様にして証明できる．

なお，$\phi \in K$ にたいして

$$\phi \longmapsto p\phi, \qquad p = -i\frac{d}{dx},$$

で定義される演算子をP_1とすると，P_1が本質的自己共役，従って$\overline{P_1} = P$として自己共役演算子が得られることも，同様にして示せる．

応用例5．

応用例4の議論が直ちにFock spaceの場合に一般化できることは明らかであるが，話を具体的にするため，GlimmとJaffeが最近扱っている一次元のボーズ粒子系のモデルを考えてみる．[2)]

通常，物理の文献では，次のようなフォーマルな式を書くことから出発する．

まず，Fock spaceの元に相当する「状態ベクトル」$|\Phi\rangle$を次の形に書く．

$$|\Phi\rangle = \phi_0|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\int dk_1\cdots dk_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\phi_n(k_1,\cdots,k_n)\times$$

$$a^*(k_1)\cdots a^*(k_n)|0\rangle$$

ここに$|0\rangle$は真空の状態ベクトル．$a(k)$と$a^*(k)$は消滅と生成の「演算子」とよばれているが，これはよく定義された演算子ではなく，さしあたってフォーマルな意味しか持

たない．それでも一応，次のような交換関係をみたすものとする：

$$[\ a(k),\ a^*(k')\ ]\ =\ \delta(k-k'),$$

a どうし，a^* どうしは可換で，かつすべての k にたいし

$a(k)|0\rangle = 0$.

また，$\phi_0 \in \mathbb{C}$，$\phi_n \in L_2(\mathbb{R}^n)$ である．この際，a^* どうしが可換であることを用いると，上の ϕ_n は事実上対称関数になっていることが分る．

上の交換関係を用いてフォーマルな計算をしてみると，

$$\langle \Phi | \Phi \rangle\ =\ |\phi_0|^2\ +\ \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

の関係が成り立っていることが確かめられる．そこで，$\mathfrak{H}_0 = \mathbb{C}$，$\mathfrak{H}_n$ を $\phi_n \in L_2(\mathbb{R}^n)$ でかつ対称な関数の全体として，$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ をつくり，これをもって Fock space の正しい数学的定義とする．

他方，$a(k)$ や $a^*(k)$ もよく定義された量ではないが，これもフォーマルに

$$a(f)\ =\ \int f(k)\,a(k)\,dk, \qquad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

をつくって $|\Phi\rangle$ に作用させてみると，この $a(f)$ は，$\mathfrak{H}_n$ の元 $\phi_n(k_1, \cdots, k_n)$ を $\mathfrak{H}_{n-1}$ の元 $\sqrt{n}\int f(k)\,\phi_n(k_1, k_{n-1}, k)\,dk$ にうつしていることが分る．従って，$a(f)$ をこのような $\mathfrak{H}_n \to \mathfrak{H}_{n-1}$ の（本当の意味の）演算子として

再定義することが出来る．

同様に $a^*(f)$ は，Ω_{n-1} から Ω_n への演算子として，

$$\phi(k_1, \cdots, k_{n-1}) \longmapsto \sqrt{n}\ S\ f(k_n)\,\phi(k_1, \cdots, k_{n-1})$$

で定義される（ここに S は対称化をあらわす）．

$\Omega_n \to \Omega_{n-1}$ の演算子と考えた時の $a(f)$ は Ω_n 全体で定義された有界演算子で，そのノルムは，

$$\| a(f) \|_{\Omega_n \to \Omega_{n-1}} \leqq \sqrt{n}\ \| f \|_{L_2}$$

であることが示せる．同様に

$$\| a^*(f) \|_{\Omega_{n-1} \to \Omega_n} \leqq \sqrt{n}\ \| f \|_{L_2}.$$

座標空間で時刻 $t=0$ の時の「場の演算子」をまずフォーマルに

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega(k)}} [\ a^*(k) + a(-k)\ ]\, dk$$

で与えられるが，

$$\varphi(f) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx, \qquad f \in \mathcal{S}(R),$$

をつくって，これに well defined な意味を与えることが出来る．実際，

$$\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\ a^*(\hat{f}) + a(\hat{f}^-)\ ]$$

と書けることが示せる．ここに $\hat{f}$, $\hat{f}^-$ は f のフーリエ変換に関係づけられる関数であるが，いずれも $\mathcal{S}$ にぞくする．

従って上の式の右辺は明らかに Fock space $\mathfrak{H}$ におけるよく定義された演算子である．

f が実数値関数であるとき $\hat{f}$ と $\hat{f}^-$ は互いに複素共役で，この時 $\varphi(f)$ が自己共役であることは応用例4と同じようにして証明できる．

§2．自己共役演算子の摂動とくりこみの問題．

Regular perturbation と Singular perturbation．

H_0 をヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ における自己共役演算子とするとき，$H = H_0 + V$ が自己共役であるための十分條件を与えるものとして知られている古典的結果の一つは，次の Kato-Rellich の定理である．[3)]

定理．H_0 は自己共役，V は対称で $D(V) \supset D(H_0)$ であるとし，しかも任意の $f \in D(H_0)$ にたいし

$$\| Vf \| \leqq a \| f \| + b \| H_0 f \|, \quad b < 1,$$

が成り立つなら，$H = H_0 + V$ は自己共役で，$D(H) = D(H_0)$．

これを自己共役演算子の摂動の問題と考えたとき，定理の條件をみたす V を H_0 にたいする regular perturbation

と云う．

一方，Glimm と Jaffe による場の理論の分析では，singular perturbation とよばれる別の種類の摂動が問題になっている．彼らの定理[4]は，H_0 と V が共に自己共役であるという場合について，$D(H_0)\cap D(V)$ で定義された $H=H_0+V$ が自己共役であるための十分条件を与えている．彼らはかなり沢山の仮定をしているが，その中に，H_0，V，V_n，および $H_n=H_0+V_n$ がいずれも自己共役で，かつ共通の core D をもち，D において強収束の意味で $V_n\to V$ という仮定がある．これにたいし，$H_n\to H=H_0+V$ の収束は，もっとゆるい「R収束」でよいとしている．（H_n の resolvent が H の resolvent に強収束するとき H_n は H にR収束すると云う。このR収束の概念は，筆者が1965年にくりこみの問題の分析において用いた．[5] その後1968年に Schrader も同様の考えを用いている．[6]）

Kato-Rellich の regular perturbation では $D(V)\supset D(H_0)$ が仮定されているのにたいし，Glimm-Jaffe の singular perturbation では，H_0 と V が共通の core をもっていれば $D(V)$ と $D(H_0)$ はかなり違っていてもよい．そのかわり，regular perturbation では V は対称であればよかったのに，singular perturbation では V の自

己共役性が要求されている。このように，これらの二種類の摂動の條件はかなり入りくんでいて，一方が他方を含むというような簡単な関係にない．

ただ共通して云えることは，摂動をうけた自己共役演算子 H が，無摂動の自己共役演算子 H_0 と摂動の演算子 V の和の形に書きあらわされること，$D(H) \cap D(H_0)$ はとにかく $\mathfrak{H}$ において dense であること，等である．

さて，ここでわれわれに興味があるのは，これらの摂動の條件が，物理的にはどのような制限をあらわすものであるかという点である．この問題を，とくに，場の量子論の基本的な問題の一つである「くりこみの発散」という観点から見ていきたい．

話をはっきりさせるため，次のようなモデルを考える．

<u>質量のくりこみを含む理論のモデル</u>．

$\mathfrak{H} = \mathbb{C} \oplus L_2(R^3)$ とし，$\mathfrak{H}$ の元を $(\alpha, \beta(\vec{k}))$ のように書く．自己共役演算子 H_0 を

$$H_0 : \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\mu\alpha, k^2\beta), \qquad \mu < 0,$$

で定義する．また，V_n を次のように定義する．

$$V_n : \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha_n, \beta_n), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

ただし

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_n = -\delta\mu_n \alpha + \int \bar{f}_n(\vec{k})\beta(\vec{k})\, d^3k , \\ \beta_n(\vec{k}) = f_n(\vec{k})\alpha , \end{array}\right.$$

$$\delta\mu_n = -\int \frac{|f_n(\vec{k})|^2}{k^2-\mu}\, d^3k$$

ここに各 f_n は, $f_n \in L_2$ でかつ $f_n/|k| \in L_2$ であるものとする. V_n は $\mathfrak{H}$ 全体で定義された有界線型演算子で対称, 従って Kato - Rellich の定理の条件をみたして, $H_n = H_0 + V_n$ は自己共役, そして $D(H_n) = D(H_0)$ である。

$\delta\mu_n$ は質量のくりこみに相当する量であるが, f_n が上の制限をみたすかぎり $|\delta\mu_n| < \infty$ であることに注意しておく.

自己共役演算子 H_n の resolvent $R_n(z) = (H_n - z)^{-1}$ は具体的に計算できて,

$$R_n(z) : \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n).$$

ここに

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\alpha}_n = -\frac{1}{D_n(z)}\left[\alpha - \int \frac{\bar{f}_n(\vec{k})\beta(\vec{k})}{k^2-z}\, d^3k\right] , \\ \tilde{\beta}_n(\vec{k}) = \frac{1}{k^2-z}\left[\beta(\vec{k}) - f_n(\vec{k})\tilde{\alpha}_n\right] , \end{array}\right.$$

$$D_n(z) = z - \mu + \int |f_n(\vec{k})|^2 \left[\frac{1}{k^2-z} - \frac{1}{k^2-\mu}\right] d^3k .$$

なお, H_n のスペクトルは, $\mu \in P\sigma$, $[0, \infty) \in C\sigma$ で, H_0 のスペクトルと同一であることが分る.

以上の議論において，f_n は $f_n \in L_2$ でかつ $f_n/|k| \in L_2$ という制限があるから，$f_n = 1$ にとることは出来ない．実際，V_n の定義式において $f_n = 1$ とすれば $-\delta\mu_n = \infty$ となり，V_n は演算子として定義できない．H_n についても同様である．

しかし，上に求めた $R_n(z)$ の式において $f_n = 1$ にとることにより，新しい（z に依存する）演算子 $R(z)$ を定義することが出来る（ただし $z \in \rho$，ρ はすべての H_n に共通の resolvent set）．すなわち，

$$R(z) : \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

ここに

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = -\dfrac{1}{D(z)} \left[\alpha - \displaystyle\int \dfrac{\beta(\vec{k})}{k^2 - z} d^3k \right] \\ \tilde{\beta}(\vec{k}) = \dfrac{1}{k^2 - z} \left[\beta(\vec{k}) - \tilde{\alpha} \right] \end{cases}$$

$$D(z) = z - \mu + \int \left[\frac{1}{k^2 - z} - \frac{1}{k^2 - \mu} \right] d^3k$$

もし，f_n として

$$\begin{aligned} f_n(\vec{k}) &= 1, \quad |k| \leqq n, \\ &= 0, \quad |k| > n, \end{aligned}$$

をとるなら，$n \to \infty$ の時，各 $z \in \rho$ について $D_n(z) \to D(z)$，また強収束の意味で $R_n(z) \to R(z)$ が証明できる．

ところで，Stoneの定理[7]を用いると，この $R(z)$ をresolventにもつ自己共役演算子 H が一つ，しかもただ一つ存在することが云える．実際にこの H を求めてみると，

$$H: \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha', \beta'),$$

ここに

$$\begin{cases} \alpha' = \mu\alpha + \int [\beta(\vec{k}) + \dfrac{\alpha}{k^2-\mu}] d^3k \\ \beta'(\vec{k}) = \alpha + k^2\beta \end{cases}$$

なお，$D(H) = \{(\alpha, \beta) ; \alpha + k^2\beta \in L_2\}$ であることが示せる．また，H のスペクトルは H_n のそれと，従って H_0 のそれと同一である。

以上のことは，R収束の意味で $H_n \to H$ であることを示している．これは，Glimm - Jaffe の条件のうちの一つである．

ところが，われわれのモデルでは，$D(H_0) \cap D(H)$ は $\mathfrak{H}$ において dense ではない．また，V_n と H_0 の共通のcore D としてどんなものをとっても，D において強収束の意味で $V_n \to V$ であるような演算子 V を見出すことは出来ない．

このことは，$n \to \infty$ と共に $|\delta\mu_n| \to \infty$ であることと関係している．これはまさしく，物理学において，「質量のくりこみが無限大である」という言葉で云いあらわされている事情にほかならない．

従ってわれわれは次のように結論せざるを得ない．摂動をうけたハミルトニアンHと無摂動ハミルトニアンH_0がいずれもよく定義された自己共役演算子であり，しかもそれらの関係が，物理学において「質量のくりこみの発散」という言葉で表現されている事情を含むようなものであるためには，その場合の「摂動」はKato-Rellichのregular perturbationよりも，またGlimm-Jaffeのsingular perturbationよりも，もっと広い枠の中で考えなければならない．

そのような理論の枠として，BirmanとKreinのスキームが有望であると思われる．

Birman-Kreinの摂動．

$\mathfrak{H}$を抽象ヒルベルト空間とし，$\mathfrak{H}$における二つの自己共役演算子の組（H, H_0）が与えられているとする．このような道具だてから出発して，（とくに，何かある演算子Vが存在して$H = H_0 + V$のように書ける，というようなことを仮定せずに）物理的に興味あるどのような結論がみちびき出されるか，という点にかんしてBirmanとKreinはいくつかの定理を与えた．[8,9]

定理1． H, H_0のresolventを$R(z)$，$R_0(z)$とし，そ

れらの resolvent set を ρ, ρ_0 とする．$z \in \rho \cap \rho_0$ にたいし

$$R(z) - R_0(z) = A(z)$$

が trace class にぞくするなら，次の性質をもつ演算子 $W_\pm$（これを wave operator と云う）が存在する．

$$W_\pm = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\ e^{iHt}\, e^{-iH_0 t} P_0$$

ここに，P_0 は H_0 にかんして絶対連続な部分空間 $\mathfrak{H}_{0,ac}$ への orthogonal projection である．$W_\pm$ はいずれも，$\mathfrak{H}_{0,ac}$ を $\mathfrak{H}_{ac}$（H にかんして絶対連続な部分空間）へ等距離的にうつす．

この時，H と H_0 のスペクトルの絶対連続部分は互いに等しい．

また，$S = W_+^* W_-$ が定義できて，H_0 と可換であり，これは $\mathfrak{H}_{0,ac}$ 上でユニタリー．同様に $S' = W_- W_+^*$ が定義できて H と可換であり，$\mathfrak{H}_{ac}$ 上でユニタリーである．S と S' はユニタリー同値だが，演算子 S の行列要素は Dyson の理論で S 行列とよばれているもの，S' のそれはいわゆる in-out formalism で S 行列とよばれているもので，いずれも，量子力学の「確率保存の原理」と矛盾せずに散乱の現象を記述できるために大切な量である．

定理2. 定理1と同じ条件のもとで

$$\mathrm{tr}\, A(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\omega)}{(z-\omega)^2}\, d\omega$$

の形の積分表示が可能である。ここに ξ は、順序づけられた組（H, H_0）によって附加定数を除いてきまる可測関数で、

$$\frac{\xi(\omega)}{1+\omega^2} \in L_1(-\infty, \infty).$$

定理3. 上と同じ条件のもとで部分空間 $\mathfrak{H}_{0,ac}$ は

$$\mathfrak{H}_{0,ac} = \int^{\oplus} \mathfrak{H}_\omega \, d\sigma(\omega)$$

のように direct integral の形に分解できる。$\mathfrak{H}_{0,ac}$ におけるユニタリー演算子 S によって $\mathfrak{H}_\omega$ に誘導される変換の演算子を S_ω とすると、1) $I_\omega - S_\omega$ は trace class にぞくする（ここに I_ω は $\mathfrak{H}_\omega$ における恒等演算子）、2) $\det S_\omega = e^{-2\pi i \xi(\omega)}$. 但しこの式は、（H と H_0 に共通な）絶対連続スペクトルの殆どすべての点 ω に対して成り立つ。

Krein の関数 ξ は、物理で知られている partial wave phase shift $\delta_\ell(\omega)$ と次のような関係で結ばれている：

$$\xi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\,\delta_\ell(\omega) .$$

この式も、殆どすべての ω に対して正しい。また、定理の條

件の下で，この級数は絶対収束する．

Birman と Krein によるこれらの結果は，trace class の摂動（$H = H_0 + V$ で V が trace class の演算子である場合）にたいして上記の性質をもつ wave operator の存在を保証する Rosenblum - Kato の定理[10]の一般化として得られたものである．すなわち，V 自身が trace class にぞくするという強い條件のもとでは，$\xi \in L_1$ で，

$$tr\ V = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\omega)\, d\omega$$

と書ける．従って，この時は，もし ξ が連續関数なら $\omega \to \infty$ でかなり早く 0 に近づかなければならないことになる．これは，phase shift $\delta_\ell(\omega)$ の高エネルギー極限にたいするかなりきびしい制限になる．

再びわれわれのモデルについて．

質量のくりこみが発散するわれわれのモデルについて，Birman - Krein の摂動の條件をチェックしてみよう．$R(z)$ の式は前に書いてあるし，$R_0(z)$ は簡単に得られるから，$A(z)$ を具体的に求めることが出来，これは実は finite rank の演算子であることが分る．従って，当然 trace class にぞくする．

それ故，Birman - Krein の摂動にかんする定理の結果がすべて成り立つ．すなわち，この場合，摂動をうけたハミルトニアンHが無摂動ハミルトニアン H_0 と何かある演算子Vとの和の形に書けないにもかゝわらず，二つの自己共役演算子の組（H, H_0）は物理的に reasonable な散乱系を記述しうる．

なお，このモデルではS波だけしか散乱されないので，$\xi = -\frac{1}{\pi}\delta_0(\omega)$ であるが，この $\delta_0(\omega)$ を実際に計算してみると，ωの大きいところで $\sim \omega^{-\frac{1}{2}}$ のようにふるまうことが分る．従って，Krein の條件 $\xi/(1+\omega^2) \in L_1$ はみたしているが，$\xi \in L_1$ にはなっていない．すなわち，この場合の摂動は trace class の摂動ではない．

ついでに，（H_n, H_0）という二つの自己共役演算子によって定義される摂動を考えてみる．この場合は，$H_n = H_0 + V_n$ で，V_n が trace class の演算子であることが容易に確かめられ，しかも

$$tr\, V_n = -\delta\mu_n$$

が成り立っていることが示せる．これは，質量のくりこみが有限の場合である．

文献

1) E. Nelson, Ann. Math. 70 (1959) 572-615.

2) J. Glimm and A. Jaffe, Phys. Rev. 176 (1968) 1945-1951.

3) T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, 1966, p287, Theorem 4.3.

4) J. Glimm and A. Jaffe, Comm. pure appl. math. 22 (1969) 401-414.

5) K. Sekine, C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965) 4995-4998; 262A (1966) 158-161.

K. Sekine, Acta Phys. Austriaca Supp. III, Elementary particle theories, Springer-Verlag, 1966, p440-463.

6) R. Schrader, Comm. math. phys. 10 (1968) 155-178.

7) M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, AMS, 1932, p146, Theorem 4.19.

8) M. Š. Birman and M. G. Kreĭn, Dokl. Akad. Nauk SSSR 144 (1962) 475-478.

9) M. G. Krein, Dokl. Akad. Nauk SSSR <u>144</u>
(1962) 268-271

10) M. Rosenblum, Pacific J. Math. <u>7</u> (1957)
997-1010.

T. Kato, ibid. p540, Theorem 4.4.